

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

THESES

PRESENTEES A LA FACULTE DES SCIENCES DE NANCY

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE NANCY

par

Joseph J. HEED

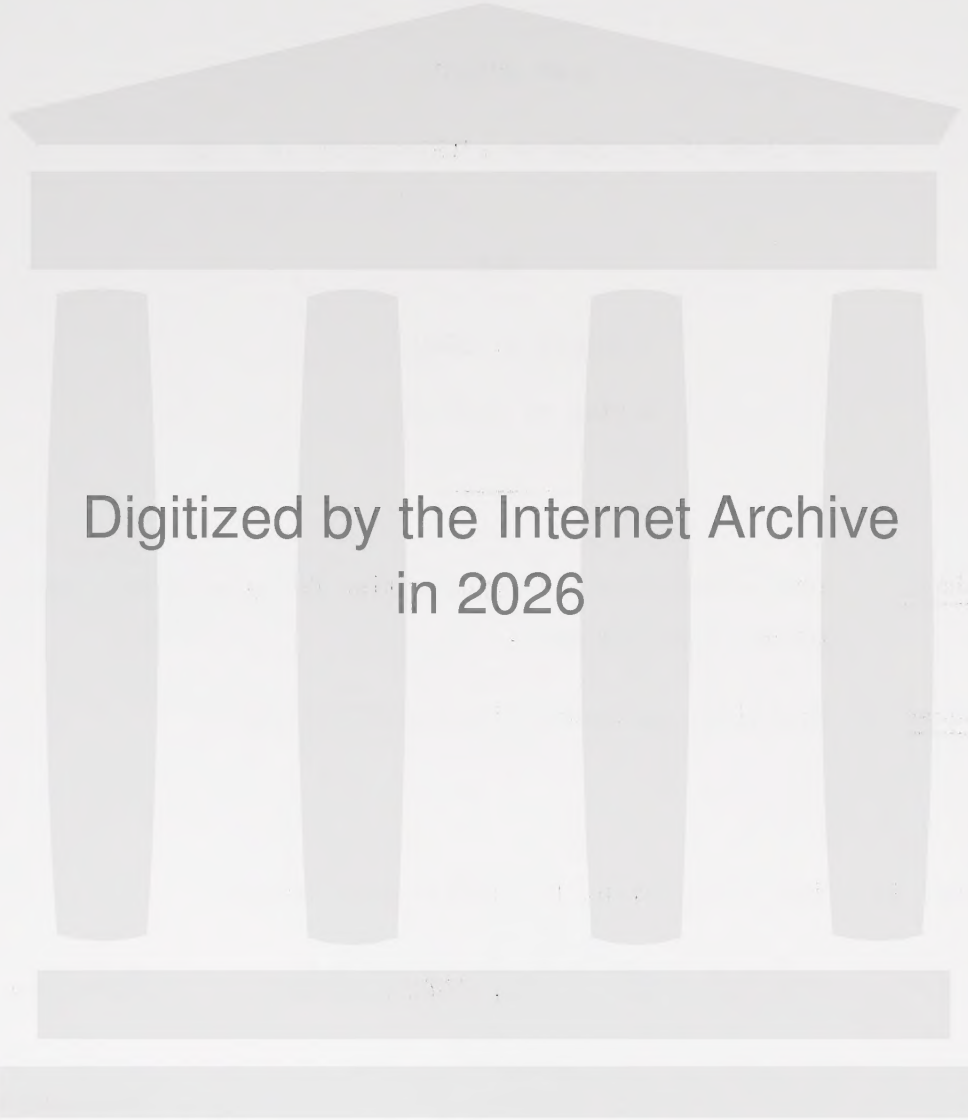
Master of Science

1ère thèse : Une méthode pour l'approximation des plus grands zéros en module d'un polynôme.

2ème thèse : Fractions continues d'après KHINCHINE.

Soutenues le 4 juin 1965 devant la Commission d'Examen :

M.	A. PEREIRA-GOMES	Président
Mlle	HUET	)
MM.	HILY	(
	EYMARD	)



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41551914_0027

UNIVERSITE DE NANCY - FACULTE DES SCIENCES

Doyen : M. AUBRY

Assesseur : M. GAY

Doyens honoraires : MM. CORNUBERT - DELSARTE - URION - ROUBAULT.

Professeurs honoraires : MM. CROZE - RAYBAUD - LAFFITTE - LERAY - JOLY -
LAPORTE - EICHHORN - GODEMENT - DUBREIL - L. SCHWARTZ - DIEUDONNE - DE MALLEMANN -
LONGCHAMBON - LETORT - DODE - GAUTHIER - GOUDET - OLMER - CORNUBERT - CHAPELLE -
GUERIN - WAHL - ECHEVIN.

Maîtres de Conférences honoraires : MM. LIENHART - PIERRET.

PROFESSEURS

MM.

URION	Chimie biologique	GAYET	Physiologie
DELSARTE	Analyse supérieure	MALAPRADE	Chimie
ROUBAULT	Géologie	HADNI	Physique
CHAPPELLE	Mécanique rationnelle	BONVALET	Mécanique appliquée
VEILLET	Biologie animale	KERN	Minéralogie
BARRIOL	Chimie théorique	BASTICK	Chimie
BIZETTE	Physique	DUCHAUFOR	Pédologie
GUILLIEN	Electronique	NEEL	Chimie organique industrielle
GIBERT	Chimie physique	GARNIER	Agronomie
LEGRAS	Mécanique rationnelle	WEPPE	Minéralogie appliquée
BOLFA	Minéralogie	BERNARD	Géologie appliquée
NICLAUSE	Chimie	CHAMPIER	Physique
FAIVRE	Physique appliquée	REGNIER	Physico-chimie
AUBRY	Chimie minérale	GAY	Chimie biologique
DUVAL	Chimie	VERNER	Botanique
COPPENS	Radiogéologie	CONDE	Zoologie
FRUHLING	Physique	STEPHAN	Zoologie
SUHNER	Physique expérimentale	EYMARD	Calcul différentiel et intégral
HILLY	Géologie	LEVISALLES	Chimie organique
LE GOFF	Génie chimique	MANGENOT	Botanique
CHAPON	Chimie biologique	Mme HERVE	Méthodes mathématiques de la physique
HEROLD	Chimie miné. industrielle		
SCHWARTZ	Exploitation minière		

MAITRES DE CONFERENCES

MM.

GOSSE	Mécanique physique	LAFON	Physique (I.S.I.N.)
ROCCI	Géologie	FELDEN	Phys. théorique et nucléaire
VUILLAUME	Psychophysiologie	FLECHON	Physique P.P.C.
Mme BASTICK	Chimie M.P.C. (Epinal)	VIGNES	Métallurgie
GUDEFIN	Physique	Mlle HUET	Mathématiques S.P.C.N.
HORN	Physique propédeutique	DEVIOT	Physique du solide
FRENTZ	Biologie animale	BLAZY	Minéralogie appliquée (ENSG)
AUROUZE	Géologie	BALESDENT	Thermo. chimique appl.
MARI	Chimie (I.S.I.N.)	JANOT	Physique M.P.C. (Epinal)

Secrétaire Principal : C. CARON

T A B L E d e s M A T I E R E S

	Pages
Introduction	2
<u>Chapitre 1</u> : Définitions de $\sum f_m$ et $\sum F_m$	3
<u>Chapitre 2</u> : Le terme général de $\sum f_m$	5
<u>Chapitre 3</u> : Les conditions initiales de $\sum f_m$	6
<u>Chapitre 4</u> : L'approximation des zéros réels	10
<u>Chapitre 5</u> : L'approximation d'une seule paire de zéros complexes	13
<u>Chapitre 6</u> : Plus que deux zéros de même module	24
<u>Chapitre 7</u> : Une méthode d'approximation des arguments qui se sert de la suite $\sum f_m$	27
Appendice - Exemples	34
Bibliographie	50

INTRODUCTION

L'objet de cette thèse est l'étude d'une méthode pour l'approximation des plus grands zéros en module d'un polynôme sans multiples racines.

La technique se sert des suites récurrentes, $\{f_m\}$ et $\{F_m\}$, basées sur les coefficients du polynôme. Si le plus grand zéro est réel, les termes d'une des suites, $\{F_m\}$, ont comme limite ce zéro réel (D. Bernoulli, [3]). Si les plus grands zéros en module sont complexes, et d'une seule paire, les termes de $\{F_m\}$ apparaissent en cycles. Le produit des termes d'un cycle est un estimateur d'une puissance du module des zéros, et les proportions des nombres des termes des cycles sur les nombres des termes négatifs des cycles sont les réduites de la fraction continue de π/θ , où θ est l'argument des zéros.

Si les plus grands zéros en module sont en nombre supérieur à une seule paire des nombres complexes, la suite citée ci-dessus ne donne pas efficacement les arguments. Dans ce cas, une troisième suite peut être construite basée sur la suite $\{f_m\}$, qui nous donne l'argument le plus près de π ou 0.

Ces techniques sont les plus efficaces pour les polynômes où le plus grand zéro est réel ou les plus grands zéros sont deux et complexes, et où le prochain zéro n'est pas trop près en module des plus grands zéros.

Je tiens à remercier Monsieur J. HILY qui a dirigé mes recherches et dont les conseils m'ont été précieux.

1) Soit

$$p(x) = x^n - (a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n)$$

un polynôme sans zéros multiples, et soit $\{f_m\}$, $\{F_m\}$ deux suites récurrentes telles que,

$$f_0 = b_0, \quad f_1 = b_1, \quad \dots, \quad f_{n-1} = b_{n-1}$$

$$f_m = a_1 f_{m-1} + a_2 f_{m-2} + \dots + a_n f_{m-n}, \quad m \geq n$$

$$F_m = f_{m+1} / f_m \quad \text{sauf si } f_m = 0.$$

Si $f_m = 0$ pour une infinité de valeurs de m on sait (Mahler, [5]) que les valeurs de m telles que $f_m = 0$ forment des progressions arithmétiques,

$$f_m = r_1^m + \dots + r_n^m \quad (\S\S 2, 3), \text{ où les } r_i \text{ sont les}$$

zéros de $p(x)$.

Supposons que

$$|r_1| = |r_2| = \dots = |r_k| > |r_{k+1}| \geq \dots \geq |r_n|.$$

Soit $a + b\gamma$ l'une de ces progressions arithmétiques.

$$\begin{aligned} \frac{f_{a+b\gamma}}{r_1^{a+b\gamma}} &= 1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{a+b\gamma} + \dots + \left(\frac{r_k}{r_1}\right)^{a+b\gamma} + \dots + \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^{a+b\gamma} = 0 \\ &1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{a+b\gamma} + \dots + \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^{a+b\gamma} = O(\rho^n), \quad (\rho < 1) \end{aligned}$$

et l'expression à gauche tend vers zéro comme une progression géométrique.

Donc, la série de terme général

$$u_{\mathfrak{D}} = 1 + \left(\frac{r_2}{r_1} \right)^{a+b\mathfrak{D}} + \dots + \left(\frac{r_k}{r_1} \right)^{a+b\mathfrak{D}}$$

a un rayon de convergence supérieur à 1 et c'est le terme général d'une fraction rationnelle dont tous les pôles sont de module 1. C'est donc que la fraction se réduit à un polynôme, et $n_{\mathfrak{D}} = 0$ pour $\mathfrak{D}$ assez grand.

$$u_x = 1 + \lambda_1 e^{2\pi i x \mu_1} + \dots + \lambda_{k-1} e^{2\pi i x \mu_{k-1}}$$

est pseudo-périodique. C'est nul pour x entier, assez grand, donc c'est périodique, et donc s'annule pour tout x , et en particulier pour $x = 0$.

Démonstration :

Supposons μ_1 , rationnellement indépendant des autres μ_i .

Le théorème de Kronecker [2] nous dit qu'il existe une suite n_1 et

il existe des $\alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ tels que modulo 1 $n_1 \mu_j$ approche α_j et

que $n_1 \mu_1$ approche toutes valeurs quelconques fixées. Donc, si $\|n\mu_1\| = \alpha_1 + \varepsilon_1$

$$\sum \varepsilon_i + (1 + \lambda_2 e^{2\pi i \alpha_2} + \dots + \lambda_{k-1} e^{2\pi i \alpha_{k-1}}) + \lambda_1 e^{2\pi i n_1 \mu_1} = 0.$$

L'expression entre parenthèses approche zéro. Mais $\lambda_1 e^{2\pi i n_1 \mu_1}$

approche zéro aussi, donc μ_1 , et en conséquence μ_i , ne sont pas rationnellement indépendants. Donc $\mu_i = p/q \theta$, et n_x est périodique.

Ainsi les r_i/r_1 sont des racines d'unité, et il existe un entier q tel que $r_1^q = \dots = r_k^q$.

En regardant ce qui se passe pour les termes correspondants au second plus grand module on obtient la même conclusion. C'est-à-dire qu'il

existe un entier p (p est évidemment égal à b) tel que l'équation dont les racines sont les r_i^p n'admette que des racines multiples de modules deux à deux distincts. C'est-à-dire que ces racines sont réelles.

Si on forme le polynôme $g(x)$ de zéros $r_1^p, \dots, r_n^p$, tous ces zéros seront réels. Si on enlève les zéros multiples de $g(x)$ on aura un polynôme $h(x)$ dont le plus grand zéro sera r_1^p . Ce zéro est réel, et les méthodes citées ci-dessous seront valables. Donc r_1 sera une des solutions à $r_1^p = \rho_1$.

2) Le terme général de $\sum f_m$.

La théorie des équations homogènes des différences linéaires nous assure que la solution générale à f_m est donnée par

$$f_m = c_1 r_1^m + c_2 r_2^m + \dots + c_n r_n^m$$

où les r_i sont les zéros de $p(x)$ (tous distincts), et les c_i sont des constants qui peuvent être déterminés par les conditions initiales. Soit,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & r_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_1^{n-1} & r_n^{n-1} & r_n^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{où } RC = B .$$

Les c_i peuvent être obtenus si on peut trouver l'inverse de R [6].

Le polynôme $p_1(x) = p(x) / (x - r_1)$ a n coefficients, et $p_1(r_2) = p_1(r_3) = \dots = p_1(r_n) = 0$. Si nous formons un vecteur horizontal de ces coefficients écrit dans l'ordre inverse, ce vecteur serait orthogonal à chaque colonne de R , sauf la première. Il nous faudrait davantage un facteur tel que le produit scalaire de ce vecteur et la première colonne soit unité. Ce facteur est $p_1(r_1) = p'(r_1)$. Donc, les coefficients qui sont les termes de ce vecteur sont les coefficients de $p_1(x) / p'(r_1)$, et les coefficients du i^{e} rang sont ceux de $p_i(x) / p'(r_i)$, et R^{-1} est donné par

$$R^{-1} = [c_{ij}]$$

où $p_i(x) / p'(r_i) = c_{i1} + c_{i2} x + c_{i3} x^2 + \dots + c_{in} x^{n-1}$.

Ainsi, $c_i = c_{i1} b_0 + c_{i2} b_1 + \dots + c_{in} b_{n-1}$.

3) Les conditions initiales de $\sum f_m$

Quoique beaucoup des résultats de cette étude soient valables pour d'autres valeurs des c_i , les valeurs qui conviennent le mieux sont $c_i = 1$, et ce sont les valeurs utilisées ici. On peut obtenir ces valeurs en donnant aux b_i les valeurs suivantes :

$$b_0 = n$$

$$b_1 = -a_1$$

$$b_2 = -(a_1 b_1 + a_2)$$

•
•
•

$$b_{n-1} = -(a_1 b_{n-2} + a_2 b_{n-3} + \dots + a_{n-1} b_1 + (n-1) a_{n-1})$$

Démonstration :

$$\text{Soit } p_n^j = r_1^j + r_2^j + \dots + r_n^j .$$

a) D'abord on établit

$$R_n^n + R_n^{n-1} a_1 + R_n^{n-2} a_2 + \dots + R_n^1 a_{n-1} + R_n^0 a_n = 0$$

où

$$a_1 = -(r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

$$a_2 = (r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n)$$

•
•
•

$$a_n = (-1)^n (r_1 r_2 \dots r_n) .$$

La combinaison des deux premiers termes

$$R_n^n - R_n^{n-1} (r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

comme tout terme de la forme

$$-r_i^{n-1} r_j , \quad i \neq j .$$

La combinaison de ce résultat et le troisième terme

$$R_n^{n-2}(r_1 r_2 + r_1 r_3 + \dots + r_{n-1} r_n)$$

donne tout terme de la forme

$$r_i^{n-2} r_j r_k, \quad i \neq j \neq k.$$

La combinaison de ce résultat et le prochain terme donne tout terme de la forme

$$-r_i^{n-3} r_j r_k r_l, \quad i \neq j \neq k \neq l.$$

Nous continuons ce processus. Ainsi la combinaison de l'avant-dernier terme et le résultat précédent donne tout terme de la forme

$$(-1)^{n-1} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}, \quad i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_n.$$

Ces termes sont tous identiques. Ils sont en nombre $\binom{n}{n-1} = n$.

C'est-à-dire que ce résultat est

$$(-1)^{n-1} n(r_1 r_2 \dots r_n).$$

La combinaison de ce résultat et le dernier terme

$$(-1)^n n(r_1 r_2 \dots r_n),$$

donne zéro.

b) Maintenant on établit

$$b_0 = R_n^0 = n$$

$$b_1 = R_n^1$$

.

.

.

$$b_{n-1} = R_n^{n-1}.$$

Il est évident que c'est vrai pour b_1 et b_1 . Ainsi, pour b_2 nous avons

$$b_2 = -(a_1 R_n^1 + 2a_2) .$$

De (a) nous avons : $R_n^2 + a_1 R_n^1 + 2a_2 = 0$, et ainsi,

$$b_2 = R_n^2 .$$

En général, si $b_k = R_n^k$ pour $k < K$,

$$b_K = -(a_1 R_n^{K-1} + a_2 R_n^{K-2} + \dots + K a_K) , \text{ et de (a),}$$

$$b_K = R_n^K .$$

c) Finalement, nous avons : $c_i = 1$.

Soit $\sigma_{ij} = (-1)^j$ fois la $j^{\text{ème}}$ fonction symétrique en $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_n$.

C'est-à-dire :

$$\sigma_{i1} = -(r_1 + r_2 + \dots + r_{i-1} + r_{i+1} + \dots + r_n)$$

.

$$\sigma_{i \ n-1} = (-1)^{n-1} (r_1 r_2 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_n) .$$

$$\text{Alors, } c_i = \frac{R_n^{n-1} + R_n^{n-2} \sigma_{i1} + \dots + R_n^0 \sigma_{i \ n-1}}{r_i^{n-1} + r_i^{n-2} \sigma_{i1} + \dots + \sigma_{i \ n-1}} .$$

Pour le numérateur on peut écrire $A + B$, où

$$A = r_i^{n-1} + r_i^{n-2} \sigma_{i1} + \dots + \sigma_{i \ n-1}$$

$$B = B_{n-1}^{n-1} + B_{n-1}^{n-2} \sigma_{i1} + \dots + B_{n-1}^0 \sigma_{i, n-1}, \quad \text{et,}$$

$$B_{n-1}^j = r_1^j + r_2^j + \dots + r_{i-1}^j + r_{i+1}^j + \dots + r_n^j.$$

De (a) nous avons $B = 0$. Ainsi,

$$c_i = A/A = 1.$$

4) L'approximation des zéros réels.

Soit $r_1, r_2, \dots, r_n$ les zéros de $p(x)$,

$$|r_1| \geq |r_2| \geq \dots \geq |r_n|.$$

a) Soit r_1 réel, $|r_1| \neq |r_2|$.

$$B_m = \frac{r_1^{m+1} + r_2^{m+1} + \dots + r_n^{m+1}}{r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m}$$

et en divisant par r_1^m / r_1^m ,

$$F_m = r_1 \left[\frac{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{m+1} + \dots + \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^{m+1}}{1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^m + \dots + \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^m} \right].$$

Nous notons que $\lim_{m \rightarrow \infty} F_m = r_1$, puisque $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^m = 0$.

Nous pouvons obtenir une idée de la rapidité de la convergence d'après les résultats suivants :

$$\begin{aligned}
 i) \quad F_m &= r_1 \left[1 - \frac{r_2^m + r_3^m + \dots + r_n^m}{r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m} \right] + \frac{r_2^{m+1} + \dots + r_n^{m+1}}{r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m} \\
 &= r_1 \left[1 - \frac{1 + \left(\frac{r_3}{r_2}\right)^m + \dots + \left(\frac{r_n}{r_2}\right)^m}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m + \dots + \left(\frac{r_n}{r_2}\right)^m} \right] + \frac{r_2 + \dots + r_n \left(\frac{r_n}{r_2}\right)^m}{\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^m + \dots + \left(\frac{r_n}{r_2}\right)^m}
 \end{aligned}$$

La rapidité de la convergence est essentiellement une fonction de r_1/r_2 , où r_2 est le deuxième plus grand zéro.

ii) De Schneider [7], nous avons le résultat suivant : "Si α est algébrique de degré s et ξ algébrique de degré n , et si H est la hauteur de ξ , alors on a pour $\alpha \neq \xi$

$$|\alpha - \xi| > \frac{c^n}{H^s}$$

où $c > 0$ est une constante ne dépendant que de α ."

Soit $\alpha = r_1$, $\xi = r_i$, $|r_1| > |r_i|$. On a,

$$\left| |r_1| - |r_i| \right| \geq |r_1 - r_i| > \frac{c^n}{H^s}$$

$$1 > \left| 1 - \left| \frac{r_i}{r_1} \right| \right| \geq \frac{c^n}{|r_1| H^s}$$

$$1 > \left| 1 - \frac{c^n}{|r_1| H^s} \right| \geq \left| \frac{r_i}{r_1} \right|$$

$$1 > \left| 1 - \frac{c^n}{|r_1| H^s} \right|^m \geq \left| \frac{r_i}{r_1} \right|^m.$$

Si $\epsilon_k = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^k + \left(\frac{r_3}{r_1}\right)^k + \dots + \left(\frac{r_n}{r_1}\right)^k$, alors,

$$|\epsilon_k| \leq \left|1 - \frac{c^k}{|r_1|^H s_1}\right|^k + \dots + \left|1 - \frac{c^k}{|r_1|^H s_{n-1}}\right|^k.$$

b) Soit r_1 réel, $r_1 = -r_2$.

$$F_m = r_1 \left[\frac{1 + (-1)^{m+1} + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^{m+1}}{1 + (-1)^m + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^m} \right]$$

Lorsque $\sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^{m+1}$, $\sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^m$ deviennent petits, les termes

F_n auront des valeurs alternativement grandes et petites.

Considérons le produit $F_m F_{m+1}$.

$$F_m F_{m+1} = \frac{r_1^{m+2} + r_2^{m+2} + \dots + r_n^{m+2}}{r_1^m + r_2^m + \dots + r_n^m}$$

$$F_m F_{m+1} = r_1^2 \left[\frac{1 + (-1)^{m+2} + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^{m+2}}{1 + (-1)^m + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r_1}\right)^m} \right]$$

Pour m pair on a

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m F_{m+1} = r_1^2.$$

Pour m impair on a

$$\frac{F_m F_{m+1}}{F_m^m + \dots + F_n^m} = \frac{r_1^{m+2} + \dots + r_n^{m+2}}{r_1^m + \dots + r_n^m} .$$

Pour r_3 réel, $|r_3| \neq |r_4|$, m impair,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m F_{m+1} = r_3^2 .$$

Pour $r_3 = -r_4$, $r_5 = -r_6$, $\dots$, $|r_k| = |r_{k+1}|$, $r_1, \dots, r_k$ réels, m impair,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F_m F_{m+1} = r_k^2 .$$

Pour $|r_3| = |r_4|$, r_3, r_4 complexes avec arguments $\pm \theta$,

$$F_m F_{m+1} \sim |r_3|^2 \frac{\cos(m+2)\theta}{\cos m\theta} \quad (\text{voir section 5})$$

5) L'approximation d'une seule paire de zéros complexes.

$$\text{Soit } r_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$r_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$\pi > \theta > 0, \quad r > |r_3| \geq \dots \geq |r_n| .$$

$$F_m = r \left[\frac{\cos(m+1)\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r}\right)^{m+1}}{\cos m\theta + \frac{1}{2} \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r}\right)^m} \right]$$

Pour m assez grand,

$$F_m \sim r \frac{\cos(m+1)\theta}{\cos m \theta}$$

Les termes de $\sum F_m$ apparaîtront en cycles. Si un cycle contient p termes :

- i) Le produit de ces p termes sera approximativement $\pm(r)^p$.
- ii) La valeur de θ peut être déterminée par le nombre de termes d'un cycle et le nombre de termes négatifs de ce même cycle. Plus précisément, si un cycle de p termes contient q termes négatifs, $p/q \sim \pi/\theta$.

a) Les arguments rationnels.

Soit $\pi/\theta = p/q$ rationnel. Alors, $q\pi = p\theta$, et les termes de $\sum F_m$ sont :

$$F_m \sim r \frac{\cos(m+1)\theta}{\cos m \theta}$$

$$F_{m+1} \sim r \frac{\cos(m+2)\theta}{\cos(m+1)\theta}$$

•
•
•

$$F_{m+p-1} \sim r \frac{\cos(m+p)\theta}{\cos(m+p-1)\theta} = \frac{r(-1)^q \cos m \theta}{\cos(m+p-1)\theta}$$

$$F_{m+p} \sim r \frac{\cos(m+p+1)\theta}{\cos(m+p)\theta} = \frac{r(-1)^q \cos(m+1)\theta}{(-1)^q \cos m \theta}$$

F_m correspond à F_{m+p} , et les termes F_m à F_{m+p-1} constituent un cycle.

Le numérateur de F_j est le dénominateur de F_{j+1} , et le numérateur de F_{m+p-1} est le dénominateur de F_m . Le produit de ces termes F_m à F_{m+p-1} est $\pm (r)^p$.

Puisque $F_m \sim r \frac{\cos(m+1)\theta}{\cos m\theta}$, $r > 0$, le signe de F_m sera déterminé par le signe de $\cos(m+1)\theta / \cos m\theta$. Si les courbes de $\cos(m+1)\theta$ et $\cos m\theta$ sont désignées sur un m -axe, la courbe de $\cos(m+1)\theta$ suivra celle de $\cos m\theta$ par une distance d'une unité. Le quotient $\cos(m+1)\theta / \cos m\theta$, ainsi que le terme F_m , sera négatif pour $m = t$ lorsque la courbe de $\cos m\theta$ traverse l'axe entre t et $t+1$ (t entier). Cela entraîne que $\cos(m+1)\theta$ traverse l'axe entre $t-1$ et t . Cela arrivera une fois par demi-cycle de la courbe de $\cos m\theta$. Donc, pour $F_{m+k} = F_{m+p+k}$, $k < p$, si il y a q termes négatifs entre F_m et F_{m+p-1} , alors,

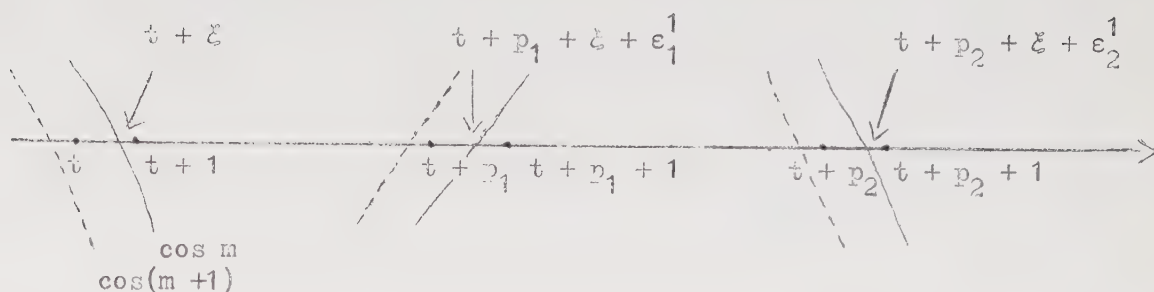
$$q\pi = p\theta, \text{ et } p/q = \pi/\theta.$$

b) Les arguments irrationnels.

Lorsque π/θ n'est pas rationnel, il n'y aura pas de cycles parfaits. Dans ces cas il y aura un système de cycles et de super-cycles. Les proportions, p_n/q_n , où p_n est le nombre des termes d'un cycle, et q_n le nombre des termes négatifs de ce même cycle, seront les réduites de la fraction continue de π/θ .

Disons que $(F_m, F_{m+1}, \dots, F_{m+p-1})$ est un cycle si F_{m+k} a le même signe que F_{m+p+k} , $k < p$. Désignons ceci par $\sigma(F_{m+k}) = \sigma(F_{m+p+k})$.

Considérons les courbes de $\cos(m+1)\theta$ et $\cos m\theta$.



C'est évident que $\sigma(F_t) = \sigma(F_{t+p_1}) = \sigma(F_{t+p_2})$, donc, que

F_t correspond à F_{t+p_1} et à F_{t+p_2} . Si $|\varepsilon_1^1| < |\varepsilon_2^1|$ la correspondance

$F_t \longleftrightarrow F_{t+p_1}$ sera "mieux" que la correspondance $F_t \longleftrightarrow F_{t+p_2}$, et nous

dirons que le cycle de p_1 termes est "mieux" que le cycle de p_2 termes.

Pour un cycle qui contient p termes nous avons le résultat général suivant.

Si $\varepsilon = \varepsilon^1 \theta$, où ε^1 est celui du dessin, et si $p\theta = q\pi \pm \varepsilon$, et si le cycle de p termes de F_m à F_{m+p-1} est mieux que les cycles de $p-1$ et $p+1$ termes de F_m à F_{m+p-2} et de F_m à F_{m+p} , alors, $|\varepsilon| < \min(\theta, \pi - \theta)$.

Démonstration :

Supposons $p\theta = q\pi + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$,

$\varepsilon = \theta + \delta$, $\delta > 0$.

Alors, $p\theta = q\pi + \theta + \delta$

$(p-1)\theta = q\pi + \delta$, $\delta < \varepsilon$, et le cycle de $(p-1)$

termes serait mieux que celui de p termes.

$$\text{Supposons } p\theta = q\pi + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = (\pi - \theta) + \delta, \quad \delta > 0.$$

Alors, $(p+1)\theta = (q+1)\pi + \delta$, $\delta < \varepsilon$, et le cycle de $(p+1)$ termes serait mieux que celui de p termes.

$$\text{Supposons } p\theta = q\pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = \theta + \delta, \quad \delta > 0.$$

Alors, $(p+1)\theta = q\pi - \delta$, $\delta < \varepsilon$, et le cycle de $(p+1)$ termes serait mieux que celui de p termes.

$$\text{Finalement, supposons } p\theta = q\pi - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

$$\varepsilon = (\pi - \theta) + \delta, \quad \delta > 0.$$

Alors, $(p-1)\theta = (q-1)\pi - \delta$, $\delta < \varepsilon$, et le cycle de $(p-1)$ termes serait mieux que celui de p termes.

$$\text{Donc, } |\varepsilon| < \min(\theta, \pi - \theta).$$

Les proportions, p_n/q_n , où p_n est le nombre des termes d'un cycle, et q_n est le nombre des termes négatifs de ce même cycle, sont les réduites de la fraction continue de π/θ .

$$\text{Soit } \pi/\theta = a_1 + \varepsilon/\theta, \quad \varepsilon < \theta \quad (\varepsilon = r_1)$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{r_2}{\varepsilon}, \quad r_2 < \varepsilon$$

.

.

.

$$= a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} \quad r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$= a_1 + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} + \frac{r_n}{r_{n-1}} \quad r_n < r_{n-1}.$$

.

.

.

le développement en fraction continue de π/θ .

$$\text{Soit } \pi q_{n-2} - \theta p_{n-2} = (-1)^{n-2} \epsilon_{n-2} \quad (\epsilon > 0)$$

$$\pi q_{n-1} - \theta p_{n-1} = (-1)^{n-1} \epsilon_{n-1}$$

où p_n/q_n est la n^e réduite de la fraction continue de π/θ .

$$\text{Alors, } r_n = \epsilon_n, \text{ où } \epsilon_n = \epsilon_n^1 \theta.$$

Démonstration :

$$\text{Présumons que } r_{n-1} = \epsilon_{n-1}, \quad r_{n-2} = \epsilon_{n-2}.$$

C'est facile à démontrer pour r_1 et r_2 .

$$\text{i) } \pi/\theta = a_1 + \epsilon_1/\theta, \quad \text{donc, } \epsilon_1 = r_1$$

$$\text{ii) } \pi/\theta = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{r_2}{\epsilon_1} = \frac{a_1(a_2\epsilon_1 + r_2) + \epsilon_1}{a_2\epsilon_1 + r_2}$$

$$p_2 = a_1 a_2 + 1, \quad q_2 = a_2. \text{ Donc, par définition de } \epsilon_2,$$

$$a_2 \pi - \theta (a_1 a_2 + 1) = -\epsilon_2. \text{ Aussi,}$$

$$\pi/\theta = \frac{a_1(a_2\epsilon_1 + r_2) + \epsilon_1}{a_2\epsilon_1 + r_2}$$

$$\pi(a_2\epsilon_1 + r_2) = \theta a_1(a_2\epsilon_1 + r_2) + \theta \epsilon_1$$

$$\pi a_2 - (a_1 a_2 + 1) \theta = \frac{r_2}{\epsilon_1} (a_1 \theta - \pi).$$

$$\text{Mais, } a_1 \theta - \pi = -\epsilon_1, \text{ donc,}$$

$$\pi a_2 - (a_1 a_2 + 1) \theta = -r_2. \text{ L'expression à gauche est}$$

aussi égale à $-\epsilon_2$, donc,

$$r_2 = \epsilon_2.$$

De la théorie des fractions continues [3], nous avons,

$$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$$

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad .$$

Donc, pour $q_n - \theta p_n = (-1)^n \varepsilon_n$ nous pouvons écrire :

$$q_n(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) - \theta(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) = (-1)^n \varepsilon_n$$

$$(q_n q_{n-1} - \theta p_{n-1})a_n + (q_n q_{n-2} - \theta p_{n-2}) = (-1)^n \varepsilon_n ,$$

et puisque $q_{n-1} - \theta p_{n-1} = (-1)^{n-1} r_{n-1}$

$$q_{n-2} - \theta p_{n-2} = (-1)^{n-2} r_{n-2}$$

par hypothèse, nous avons,

$$a_n (-1)^{n-1} r_{n-1} + (-1)^{n-2} r_{n-2} = (-1)^n \varepsilon_n .$$

Mais de (i) ,

$$\frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{r_{n-1}}{a_n r_{n-1} + r_n} \quad , \quad \text{donc,}$$

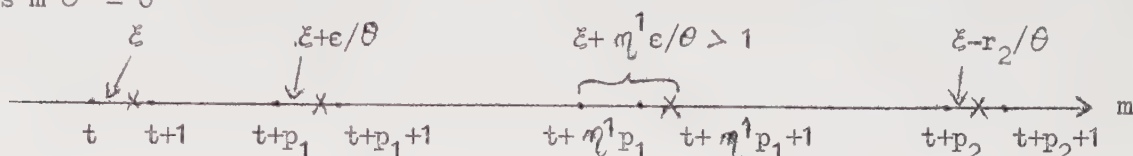
$$r_{n-2} = a_n r_{n-1} + r_n \quad .$$

$$a_n (-1)^{n-1} r_{n-1} + (-1)^{n-2} (a_n r_{n-1} + r_n) = (-1)^n \varepsilon_n$$

$$\text{et,} \quad r_n = \varepsilon_n \quad .$$

Nous avons maintenant le moyen de décrire le développement en cycles de $\sum \overline{F_m}$.

Supposons que la courbe de $\cos m \theta$ traverse l'axe pour la première fois à $t + \xi$, t entier. La courbe traversera l'axe pour la seconde fois à $t + \xi + p_1 + \epsilon/\theta$, p_1 entier. Soit x un point où $\cos m \theta = 0$



F_t sera négatif, ainsi que F_{t+p_1} , donc ces termes se correspondent.

$\cos m \theta$ sera zéro pour $m = t + \xi + \eta (p_1 + \epsilon/\theta)$,

$\eta = 1, 2, \dots$, et la courbe traversera l'axe entre $t + \eta p_1$ et $t + \eta p_1 + 1$, jusqu'à ce que pour $\eta = \eta^1$ nous ayons $\xi + \eta^1 \epsilon/\theta > 1$, et la courbe traversera l'axe entre $t + \eta^1 p_1 + 1$ et $t + \eta^1 p_1 + 2$.

Lorsque ceci arrive, un terme positif de plus sera inclus dans $\sum F_m$ (à $F_{t+\eta^1 p_1}$), et ce cycle contiendra $p_1 + 1$ termes au lieu de p_1 termes.

Eventuellement, $\cos m \theta$ sera zéro à $m = t + p_2 + \xi - r_2/\theta$, $r_2 < r_1$; et le super-cycle de p_2 termes sera mieux que le cycle de p_1 termes. Dans chaque cycle de p_1 termes il y aura un terme négatif, et $p_1 - 1$ termes positifs, sauf pour le cycle qui contient $F_{t+\eta^1 p_1}$ où il y aura un terme négatif, et p_1 termes positifs. Ainsi p_2 est plus qu'un multiple de p_1 . (Nous savons que $p_2 = a_2 p_1 + 1$). Donc, dans le cycle qui contient p_2 termes il y aura $(a_2 - 1)$ sub-cycles de p_1 termes et un cycle de $p_1 + 1$ termes.

$\cos m \theta$ sera également zéro pour $m = t + \xi + \eta (p_2 - r_2/\theta)$
 $\eta = 1, 2, \dots$. A $m = t + \xi + p_3 + r_3/\theta$, $r_3 < r_2$, un meilleur super-cycle de p_3 termes sera évident. Le nombre, q_3 , des termes négatifs de ce cycle indiquera le nombre de demi-cycles de $\cos m \theta$ entre $m = t$ et $m = p_3$, et ainsi p_3/q_3 sera une estimation de π/θ .

Les cycles continueront leur développement ainsi. Donc, s'il existe des cycles de $p_1, \dots, p_n, \dots$ termes qui contiennent $q_1, \dots, q_n$ termes négatifs, et si les p_i/q_i sont irréductibles, ils seront aussi les réduites de la fraction continue de π/θ . Ceci est aussi bien vrai pour π/θ rationnel, mais dans ce cas, la séquence des réduites est finie.

Evidemment, nous obtenons les meilleures approximations avec les plus grands cycles.

c) Deuxièmes approximations de r et θ .

i) Le produit des termes d'un cycle.

$$\text{Soit } \cos(m+p)\theta = \cos(m\theta + \epsilon)$$

$$P_m = F_m \cdot F_{m+1} \cdots F_{m+p-1}$$

$$= r^p \left[\frac{\cos(m\theta + \epsilon) + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r}\right)^{m+p}}{\cos m\theta + \sum_{i=3}^n \left(\frac{r_i}{r}\right)^m} \right]$$

$$P_m \sim r^p \frac{\cos(m\theta + \epsilon)}{\cos m\theta} = r^p (\cos \epsilon - \tan m\theta \sin \epsilon)$$

P_m donnera la meilleure approximation à r^p lorsque $\tan m\theta$ est petite, c'est-à-dire, lorsque $\cos m\theta \sim \pm 1$. Lorsque $\cos m\theta \sim 0$,

$\tan m \theta$ sera grande. Donc, les termes à mi-distance entre termes F_m de grandes valeurs seront les termes pour lesquels $\cos m \theta$ aura une valeur près de ± 1 , et pour lesquels $\tan m \theta \sim 0$. Donc,

$$\hat{f}_t = P_t^{1/p} \sim r(\cos^{1/p} \epsilon)$$

sera la meilleure approximation à r si F_t est choisi à mi-distance entre des grandes valeurs de F_m .

ii) Les termes correspondants de deux cycles.

$$\text{Soit } D_m = F_m - F_{m+p}$$

$$D_m \sim r \left[\frac{\cos(m+1)\theta}{\cos m \theta} - \frac{\cos[(m+1)\theta + \epsilon]}{\cos(m\theta + \epsilon)} \right].$$

Ceci est la même chose que

$$D_m \sim \frac{r \sin \theta \sin \epsilon}{\cos m \theta \cos(m\theta + \epsilon)}.$$

Cette différence sera la plus petite lorsque $\cos m \theta$ et $\cos(m\theta + \epsilon) \sim \pm 1$, c'est-à-dire, lorsque F_m et F_{m+p} sont à mi-distance entre les termes de $\{F_m\}$ de grandes valeurs.

Puisque $\pi > \theta > 0$, $\sin \theta$ est toujours positif. Pour ϵ petit, $\cos m \theta$ et $\cos(m\theta + \epsilon)$ auront le même signe la plupart du temps, et leur produit sera positif. Donc, D_m aura le signe de $\sin \epsilon$. C'est-à-dire, si les termes de $\{F_m\}$ correspondants ont tendance à croître, l'approximation $p/q \sim \pi/\theta$ sera moins que π/θ , et vice-versa.

Démonstration :

Soit $p \theta = q \pi + \varepsilon$, $p/q = \pi/\theta + \varepsilon/\theta q$.

Pour D_m négatif, ε est négatif et,

$$p/q < \pi/\theta .$$

Pour D_m positif, ε est positif et,

$$p/q > \pi/\theta .$$

iii) Deuxièmes approximations de r et θ .

En utilisant les résultats précédents, nous pouvons obtenir des meilleures approximations à r et θ .

Si F_t est à mi-distance entre termes de $\{ F_m \}$ de grandes valeurs,

$\hat{r}_t = F^{1/p} \sim r(\cos^{1/p} \varepsilon)$ est une bonne estimation de r , et,

$$D_m \sim r \sin \theta \sin \varepsilon .$$

En désignant

$$\hat{\theta} = q \pi / p \quad \text{ nous obtenons }$$

$$\widehat{\sin \varepsilon} = \frac{D_t}{\hat{r} \sin \hat{\theta}} , \quad \text{ où } \widehat{\sin \varepsilon} \text{ est une estimation de } \sin \varepsilon .$$

$$\text{Puisque } \sin \hat{\theta} = \sin(\theta - \varepsilon/p) = \sin \theta \cos \frac{\varepsilon}{p} - \cos \theta \sin \frac{\varepsilon}{p} ,$$

$$\widehat{\sin \varepsilon} = \frac{D_t}{\hat{r} \sin \hat{\theta}} \sim \frac{\sin \varepsilon}{\cos \frac{\varepsilon}{p} - \cos \theta \sin \frac{\varepsilon}{p}} , \text{ et } \widehat{\sin \varepsilon} \text{ sera}$$

une bonne estimation de $\sin \varepsilon$ si θ n'est pas trop près de π ou 0.

Si $\hat{\epsilon}$ est l'estimation de ϵ obtenue de $\widehat{\sin \epsilon}$, nous pouvons obtenir une deuxième estimation de θ , soit

$$\widehat{\theta} = \frac{q\pi + \hat{\epsilon}}{2}, \text{ et de } r :$$

$$P_m = r^p [\cos \hat{\epsilon} - \tan \widehat{\theta} \sin \hat{\epsilon}]$$

$$\widehat{r} = \left[\frac{P_m}{\cos \hat{\epsilon} - \tan m \widehat{\theta} \sin \hat{\epsilon}} \right]^{1/p}.$$

Ce procédé peut être prolongé :

$$D_m \sim \frac{\widehat{r} \sin \widehat{\theta} \sin \epsilon}{\cos m \widehat{\theta} \cos(m \widehat{\theta} + \hat{\epsilon})}$$

$$\widehat{\sin \epsilon} = \frac{D_m \cos m \widehat{\theta} \cos(m \widehat{\theta} + \hat{\epsilon})}{\widehat{r} \sin \widehat{\theta}}$$

Et ainsi, nous avons une deuxième estimation de $\sin \epsilon$.

6) Plus que deux zéros de même module.

Soit,

$$r_1 = r(\cos \theta + i \sin \theta) \quad \pi > \theta > 0$$

$$r_2 = r(\cos \theta - i \sin \theta)$$

$$r_3 = r(\cos \phi + i \sin \phi) \quad \pi > \phi > 0$$

$$r_4 = r(\cos \phi - i \sin \phi)$$

$$r > |r_5| \geq \dots \geq |r_n|.$$

$$R_m \sim r \left(\frac{\cos(m+1) \theta + \cos(m+1) \phi}{\cos m \theta + \cos m \phi} \right).$$

Si on désigne les courbes de $[\cos(m+1)\theta + \cos(m+1)\phi]$ et $[\cos m\theta + \cos m\phi]$ sur un m -axe, la courbe de $[\cos(m+1)\theta + \cos(m+1)\phi]$ suivra celle de $[\cos m\theta + \cos m\phi]$ par une distance d'une unité.

Des termes négatifs apparaîtront dans la suite $\sum F_m$ à F_t lorsque $[\cos(t+\varepsilon)\theta + \cos(t+\varepsilon)\phi] = 0$ pour $1 > \varepsilon > 0$, ou lorsque les courbes $\cos m\theta$ et $-\cos m\phi$ se croisent entre $m=t$ et $m=t+1$. Ces croisements se produiront irrégulièrement dans un cycle de $[\cos m\theta + \cos m\phi]$. L'irrégularité de l'occurrence des termes négatifs est ce qui distingue ce cas des cas déjà considérés. En outre, ces courbes ne seront pas toujours périodiques.

Soit $2\pi/\theta = k_1$, $2\pi/\phi = k_2$. $\cos m\theta$ terminera sa période à $m = k_1$, $\cos m\phi$ à $m = k_2$. Pour que $[\cos m\theta + \cos m\phi]$ soit périodique, il faudrait trouver deux entiers p et q tels que $pk_1 = qk_2$. Si, et $k_1 = a/b$, et $k_2 = u/v$ sont rationnels, nous pourrions choisir $p = ub$, et $q = av$. Puisque, et k_1 et k_2 ne seront pas souvent rationnels, $[\cos m\theta + \cos m\phi]$ ne sera pas souvent périodique. Néanmoins, cette fonction serait quasi-périodique si on pouvait trouver des entiers p et q tels que $p/q \sim k_2/k_1 = \theta/\phi$. Ces entiers seront les numérateurs et les dénominateurs des réduites de la fraction continue de θ/ϕ .

Si un cycle de $\sum F_m$ contenait x termes, on aurait,

$$p/x \sim \theta/2\pi, \quad q/x \sim \phi/2\pi.$$

Nous notons que nous avons essentiellement un problème d'approximation simultanée. De ce problème, Cassels [1] dit, si on veut faire des approximations d'un ensemble des nombres $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ par des fractions $p_1/q, p_2/q, \dots, p_n/q$, ayant le même dénominateur, c'est la même chose que si on fait devenir simultanément petits les nombres $\|q \theta_1\|, \|q \theta_2\|, \dots, \|q \theta_n\|$ (où $\|\theta\|$ est la différence prise dans le sens positif entre θ et l'entier le plus proche). Le théorème nous dit qu'il y a une infinité de solutions à

$$\max(\|q \theta_1\|, \dots, \|q \theta_n\|) < \frac{n}{n+1} q^{-1/n}.$$

Donc, si nous avons des zéros de même module avec arguments $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$, il faudrait trouver les entiers $p_1, p_2, \dots, p_n, q$ tels que,

$$p_1/q \sim \frac{\theta_1}{2\pi}, \quad p_2/q \sim \frac{\theta_2}{2\pi}, \quad \dots, \quad p_n/q \sim \frac{\theta_n}{2\pi}.$$

Cassels nous assure qu'il y a une infinité de solutions à

$$\max(\|q \frac{\theta_1}{2\pi}\|, \dots, \|q \frac{\theta_n}{2\pi}\|) < \frac{n}{n+1} q^{-1/n},$$

où q est le nombre des termes dans le quasi-cycle de $\sum_{m=1}^q F_m z^m$, donc on sait que $\sum_{m=1}^q \cos m \theta_i$ approche à une fonction périodique.

Mais si nous savons la valeur de q , ceci ne nous permet pas de trouver les p_i , ni les θ_i . Si il n'y a que deux arguments, θ, ϕ , $\theta < \phi$, on peut montrer que si un cycle de p termes a q termes négatifs,

alors,

$$\frac{q}{2p} \theta \leq \phi < \frac{(q+1)\theta}{2p} .$$

Mais nous n'avons aucun renseignement sur la valeur de θ .

Une méthode qui se sert de la suite $\sum f_m$ nous donne une solution satisfaisante à ce problème.

7) Une méthode d'approximation des arguments qui se sert de la suite $\sum f_m$.

a) Soit,

$$r_1 = r(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$r_2 = r(\cos \theta_1 - i \sin \theta_1)$$

·
·
·

$$(\pi > \theta_i > 0)$$

$$r_{2t-1} = r(\cos \theta_t + i \sin \theta_t)$$

$$r_{2t} = r(\cos \theta_t - i \sin \theta_t)$$

$$r > |r_{2t+1}| \geq \dots \geq |r_n| .$$

Alors,

$$f_1 = 2r(\cos \theta_1 + \dots + \cos \theta_t) + r_{2t+1} + \dots + r_n$$

$$f_2 = 2r^2(\cos 2\theta_1 + \dots + \cos 2\theta_t + r_{2t+1}^2 + \dots + r_n^2)$$

·
·
·

$$f_m = 2r^m(\cos m\theta_1 + \dots + \cos m\theta_t) + r_{2t+1}^m + \dots + r_n^m .$$

Supposons que de la suite $\sum F_m$ nous avons pu obtenir une estimation $\hat{r}$ de r .

Formons la transformation

$$f'_m = f_m / 2(\hat{r})^m.$$

Alors, cette nouvelle suite $\sum f'_m$ a pour terme général,

$$f'_m \sim \cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t + \frac{1}{2} \sum_{i=2t+1}^n \left(\frac{r_i}{\hat{r}} \right)^m.$$

Supposons que $2t = n$, alors,

$$f'_m \sim \cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t.$$

Nous pouvons trouver une deuxième transformation $f'_m \longrightarrow f''_m$

telle que

$$f''_m \sim \cos^m \theta_1 + \dots + \cos^m \theta_t.$$

Puisque les termes $\cos^m \theta_i$ tendent vers zéro, pour m assez grand, l'expression $\cos^m \theta_1 + \dots + \cos^m \theta_t$ est approximativement égale à

$$\max(\cos^m \theta_1, \dots, \cos^m \theta_t),$$

donc,

$$f''_m \sim \max(\cos^m \theta_1, \dots, \cos^m \theta_t)$$

$$(f''_m)^{1/m} \sim \max(\cos \theta_1, \dots, \cos \theta_t),$$

ce qui nous permet de trouver le θ_i qui est le plus proche de π ou 0.

b) La transformation

$$\cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t \longrightarrow \cos^m \theta_1 + \dots + \cos^m \theta_t$$

i) $\cos 2m \theta$ et $\cos(2m+1)\theta$ ont les formes,

$$\begin{aligned}\cos 2m \theta &= a_{2m,1} \cos^{2m} \theta + a_{2m,2} \cos^{2m-2} \theta + \dots + a_{2m,m} \cos^2 \theta \\ &\quad + a_{2m,m+1} , \\ \cos(2m+1)\theta &= a_{2m+1,1} \cos^{2m+1} \theta + a_{2m+1,2} \cos^{2m-1} \theta + \dots \\ &\quad + a_{2m+1,m+1} \cos \theta .\end{aligned}$$

Démonstration :

$$\begin{aligned}\text{Notons que } \cos 2 \theta &= 2 \cos^2 \theta - 1 \\ \sin 2 \theta &= (2 \cos \theta) \sin \theta \\ \cos 3 \theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \\ \sin 3 \theta &= (4 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \\ \cos 4 \theta &= 8 \cos^4 \theta - 8 \cos^2 \theta + 1 \\ \sin 4 \theta &= (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta) \sin \theta ,\end{aligned}$$

supposons que

$$\begin{aligned}\cos 2n \theta &= a_{2n,1} \cos^{2n} \theta + a_{2n,2} \cos^{2n-2} \theta + \dots + a_{2n,n} \cos^2 \theta \\ &\quad + a_{2n,n+1} \\ \sin 2n \theta &= \left[b_{2n,1} \cos^{2n-1} \theta + b_{2n,2} \cos^{2n-3} \theta + \dots \right. \\ &\quad \left. + b_{2n,n} \cos \theta \right] \sin \theta .\end{aligned}$$

Avec l'aide des identités trigonométriques, nous obtenons

$$\begin{aligned}\cos(2n+1)\theta &= (a_{2n,1} + b_{2n,1} - b_{2n,0}) \cos^{2n+1} \theta \\ &\quad + (a_{2n,2} + b_{2n,2} - b_{2n,1}) \cos^{2n-1} \theta + \dots + (a_{2n,n} + b_{2n,n} - b_{2n,n-1}) \cos^3 \theta \\ &\quad + (a_{2n,n+1} + b_{2n,n+1} - b_{2n,n}) \cos \theta ,\end{aligned}$$

et,

$$\sin(2n+1) = \left[(a_{2n,1} + b_{2n,1})\cos^{2n}\theta + (a_{2n,2} + b_{2n,2})\cos^{2n-2}\theta + \dots + (a_{2n,n} + b_{2n,n})\cos^2\theta + (a_{2n,n+1} + b_{2n,n+1}) \right] \sin\theta ,$$

où $b_{2n,0} = b_{2n,n+1} = 0$.

Encore avec l'aide des identités, nous obtenons

$$\begin{aligned} \cos(2n+2)\theta &= (2a_{2n,1} + 2b_{2n,1} - 2b_{2n,0} - a_{2n,0})\cos^{2n+2}\theta \\ &+ (2a_{2n,2} + 2b_{2n,2} - 2b_{2n,1} - a_{2n,1})\cos^{2n}\theta + \dots \\ &+ (2a_{2n,n} + 2b_{2n,n} - 2b_{2n,n-1} - a_{2n,n-1})\cos^4\theta \\ &+ (2a_{2n,n+1} + 2b_{2n,n+1} - 2b_{2n,n} - a_{2n,n})\cos^2\theta \\ &+ (2a_{2n,n+2} + 2b_{2n,n+2} - 2b_{2n,n+1} - a_{2n,n+1}) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2n+2)\theta &= \left[(2a_{2n,1} + 2b_{2n,1} - b_{2n,0})\cos^{2n+1}\theta \right. \\ &+ (2a_{2n,2} + 2b_{2n,2} - b_{2n,1})\cos^{2n-1}\theta + \dots \\ &+ (2a_{2n,n} + 2b_{2n,n} - b_{2n,n-1})\cos^3\theta \\ &\left. + (2a_{2n,n+1} + 2b_{2n,n+1} - b_{2n,n})\cos\theta \right] \sin\theta , \end{aligned}$$

où $a_{2n,0} = b_{2n,0} = b_{2n,n+1} = b_{2n,n+2} = a_{2n,n+2} = 0$.

On peut aussi les écrire :

$$\begin{aligned} \cos(2n+2)\theta &= (a_{2n+1,1} + b_{2n+1,1} - b_{2n+1,0})\cos^{2n+2}\theta \\ &+ (a_{2n+1,2} + b_{2n+1,2} - b_{2n+1,1})\cos^{2n}\theta + \dots \\ &+ (a_{2n+1,n+1} + b_{2n+1,n+1} - b_{2n+1,n})\cos^2\theta \\ &+ (a_{2n+1,n+2} + b_{2n+1,n+2} - b_{2n+1,n+1})\cos\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(2n+2)\theta &= \left[(a_{2n+1,1} + b_{2n+1,1}) \cos^{2n+1} \theta + \dots \right. \\ &\quad \left. + (a_{2n+1,n+1} + b_{2n+1,n+1}) \cos \theta \right] \sin \theta . \end{aligned}$$

Donc, $\cos(2n+2)\theta$ a la même forme que $\cos 2n\theta$, et il est évident que $\cos(2n+3)\theta$ aura la même forme que $\cos(2n+1)\theta$. Puisque $\cos 2\theta$ et $\cos 3\theta$ ont cette forme, nous avons :

$$\begin{aligned} \cos 2m\theta &= a_{2m,1} \cos^{2m} \theta + a_{2m,2} \cos^{2m-2} \theta + \dots \\ &\quad + a_{2m,m} \cos^2 \theta + a_{2m,m+1} \\ \cos(2m+1)\theta &= a_{2m+1,1} \cos^{2m+1} \theta + a_{2m+1,2} \cos^{2m-1} \theta + \dots \\ &\quad + a_{2m+1,m+1} \cos \theta , \end{aligned}$$

et en plus, $a_{m,i} = a_{m-1,i} + b_{m-1,i} - b_{m-1,i-1}$.

ii) La transformation.

Soit $f''_0 = t$, et supposons que

$$f''_k = \cos^k \theta_1 + \dots + \cos^k \theta_t, \quad k < K.$$

$$f''_K = \cos^K \theta_1 + \dots + \cos^K \theta_t. \text{ Pour } K = 2s,$$

$$\cos 2s \theta_1 = a_{2s,1} \cos^{2s} \theta_1 + a_{2s,2} \cos^{2s-2} \theta_1 + \dots + a_{2s,s+1}$$

•
•
•

$$\cos 2s \theta_t = a_{2s,1} \cos^{2s} \theta_t + a_{2s,2} \cos^{2s-2} \theta_t + \dots + a_{2s,s+1}$$

$$\cos 2s \theta_1 + \dots + \cos 2s \theta_t = a_{2s,1} (\cos^{2s} \theta_1 + \dots + \cos^{2s} \theta_t)$$

$$+ a_{2s,2} (\cos^{2s-2} \theta_1 + \dots + \cos^{2s-2} \theta_t) + \dots + t a_{2s,s+1}$$

$$= a_{2s,1} f''_{2s} + a_{2s,2} f''_{2s-2} + \dots + f''_0 a_{2s,s+1}.$$

$$f'_{2s} = a_{2s,1} f''_{2s} + a_{2s,2} f''_{2s-2} + \dots + f''_0 a_{2s,s+1}$$

$$f''_{2s} = \frac{1}{a_{2s,1}} \left[f'_{2s} - a_{2s,2} f''_{2s-2} + \dots + (-1) a_{2s,s+1} f''_0 \right].$$

Pour $K = 2s + 1$,

$$f''_{2s+1} = \frac{1}{a_{2s+1,1}} \left[f'_{2s+1} - a_{2s+1,2} f''_{2s-1} + \dots + (-1) a_{2s+1,s+1} f''_1 \right]$$

$$\text{iii) } \sum f''_m \sum .$$

Les termes pairs et impairs de $\sum f''_m \sum$ sont indépendants. Les termes pairs sont des fonctions de $f''_0 = t$, ce qui est inconnu. Donc, on se sert de termes impairs,

$$f''_{2s+1} \sim \cos^{2s+1} \theta_1 + \dots + \cos^{2s+1} \theta_t .$$

Pour s assez grand

$$f''_{2s+1} \sim \max(\cos^{2s+1} \theta_1, \dots, \cos^{2s+1} \theta_t) .$$

$$\text{iv) } \theta_1 = \pi \text{ ou } 0 .$$

$$f'_m = \pm 1/2 + \cos m \theta_2 + \dots + \cos m \theta_t , \text{ donc,}$$

$$f''_{2s+1} \sim \pm 1/2 \text{ pour } s \text{ assez grand .}$$

c) Nous avons supposé que $2t = n$. Sinon,

$$f_m = 2r^m (\cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t) + \sum_{i=2t+1}^n r_i^m ,$$

et les termes $\sum_{i=2t+1}^n r_i^m$ introduisent des erreurs dans les approximations

$$f''_m \sim \sum_{i=1}^t \cos^m \theta_i .$$

Si nous avons noté un cycle de k termes, nous avons donc,

$$f_m \sim f_{m+k}, \text{ pour } m \text{ grand, et pour tout } m,$$

$$\cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t \sim \cos(m+k) \theta_1 + \dots + \cos(m+k) \theta_t$$

Donc,

$$f_{k+1} \sim (\cos \theta_1 + \dots + \cos \theta_t) r^{k+1}_2$$

$$f_{k+1} \sim (\cos 2 \theta_1 + \dots + \cos 2 \theta_t) r^{k+2}_2$$

·
·
·

$$f_{m+k} \sim (\cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t) r^{k+m}_2$$

et,

$$f'_{k+1} = \frac{f_{k+1}}{2(\hat{r})^{k+1}} \sim \cos \theta_1 + \dots + \cos \theta_t$$

·
·
·

$$f'_{k+m} = \frac{f_{k+m}}{2(\hat{r})^{k+m}} \sim \cos m \theta_1 + \dots + \cos m \theta_t$$

et,

$$f^n_{k+m} \sim \cos^m \theta_1 + \dots + \cos^m \theta_t.$$

--:--:--:--:--

APPENDICE

Les exemples suivants ont été calculés sur un ordinateur électronique IBM 1620. Pour ces exemples, les valeurs des b_i sont tous unité. Tous les résultats restent valables pour ces valeurs des b_i sauf ceux des paragraphes 4 b ($F_m F_{m+1} \sim r_1^2$ pour m pair et impair), 5 c et 7.

1) Polynôme : $x^3 - x - 1 = 0$; $r_1 = 1,3247179$

n	F_n	n	F_n
1	1,0	19	1,3245614
2	1,0	20	1,3245033
3	2,0	21	1,3250000
4	1,0	22	1,3245283
5	1,5	23	1,3247863
6	1,3333333	24	1,3247311
7	1,2500000	25	1,3246753
8	1,4000000	26	1,3247549
9	1,2857142	27	1,3246993
10	1,3333333	28	1,3247206
11	1,3333333	29	1,3247232
12	1,3125000	30	1,3247115
13	1,3333333	31	1,3247221
14	1,3214285	32	1,3247165
15	1,3243243	33	1,3247175
16	1,3265306	34	1,3247189
17	1,3230769	35	1,3247171
18	1,3255813	36	1,3247133
37	1,3247179	41	1,3247179
38	1,3247178	42	1,3247179
39	1,3247181	43	1,3247179
40	1,3247178	44	1,3247179

2) Polynôme : $x^7 - x^6 - x^5 + x^2 - 1 = 0$; $r_1 = 1,5452156$

n	P_n	n	P_n
5	1,0	27	1,5452076
6	1,0	28	1,5452215
7	2,0	29	1,5452132
8	1,5	30	1,5452091
9	1,6666666	31	1,5452163
10	1,6000000	32	1,5452163
11	1,6250000	33	1,5452149
12	1,5384615	34	1,5452153
13	1,5500000	35	1,5452162
14	1,5483870	36	1,5452157
15	1,5416666	37	1,5452155
16	1,5405405	38	1,5452157
17	1,5438596	39	1,5452157
18	1,5454545	40	1,5452156
19	1,5441176	41	1,5452156
20	1,5452380	42	1,5452156
21	1,5454545	43	1,5452156
22	1,5453639	44	1,5452156
23	1,5451612	45	1,5452156
24	1,5453027		
25	1,5452580		
26	1,5452002		

3) Polynôme : $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 36x - 36 = 0$

zéros : 3, -3, 2, 2

n	F_n	Produits
62	3,1224494	8,9999965
63	2,8823514	
64	3,1224495	
65	2,8823515	
66	3,1224496	9,0000061
67	2,8823516	
68	3,1224500	
69	2,8823515	
70	3,1224499	

4) Polynôme : $x^5 - 23x^3 - 6x^2 + 112x + 96 = 0$

zéros : 4, -4, 3, -2, -1

n	F_n	Produits
42	1,5999816	15,9999993
43	10,000174	
44	1,5999900	16,000030
45	10,001095	
46	1,5999940	
47	10,000052	
48	1,5999973	
49	10,000028	
50	1,5999987	

5) Polynôme : $x^2 - 2 \times 10^{-5} x - 0,999999 = 0$

zéros : 1,001, -0,999

A cause de la proximité des valeurs absolues des zéros, la convergence n'est pas rapide. La convergence est des deux côtés.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	24	1,0019560
2	1,0019990	25	1,0000467
3	1,0000038	26	1,0019522
4	1,0019951	27	1,0000505
5	1,0000078	28	1,0019484
6	1,0019911	29	1,0000542
7	1,0000118	30	1,0019446
8	1,0019871	31	1,0000581
9	1,0000157	32	1,0019408
10	1,0019831	33	1,0000618
11	1,0000197	34	1,0019370
12	1,0019792	35	1,0000656
13	1,0000236	36	1,001933
14	1,0019753	37	1,0000693
15	1,0000275	38	1,0019296
16	1,0019714	39	1,0000730
17	1,0000315	40	1,0019258
18	1,0019675	41	1,0000767
19	1,0000352	42	1,0019222
20	1,0019637	43	1,0000804
21	1,0000391	44	1,0019185
22	1,0019598	45	1,0000841
23	1,0000429	46	1,0019149

6) Polynôme : $x^3 - 1,1x^2 + x - 1,1 = 0$

zéros : $1,1, \pm i$

La convergence est des deux côtés et avec une période de 4.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	25	1,0888997
2	1,0	26	1,0898059
3	1,2	27	1,1093539
4	1,1833333	28	1,1084318
5	1,0295774	29	1,0923929
6	1,0316005	30	1,0930363
7	1,1663042	31	1,1063709
8	1,1568498	32	1,1057583
9	1,0508580	33	1,0947923
10	1,0532363	34	1,0952432
11	1,1443999	35	1,1043430
12	1,1387975	36	1,1039327
13	1,0659311	37	1,0964375
14	1,0680382	38	1,0967508
15	1,1299255	39	1,1029625
16	1,1264845	40	1,1026859
17	1,0764892	41	1,0975641
18	1,0781597	42	1,0977806
19	1,1202569	43	1,1020216
20	1,1180824	44	1,1018344
21	1,0838274	45	1,0983350
22	1,0850731	46	1,0984841
23	1,1137518	47	1,1013799
24	1,1123473	48	1,1012529

7) Polynôme : $0,5x^2 - 0,965926x + 0,5 = 0$

zéros : $\cos 15^\circ \pm i \sin 15^\circ$.

La période est 12, et $9\pi/\theta = 12$.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	26	0,93196209
2	0,93186000	27	0,85885494
3	0,85873747	28	0,76751908
4	0,76735975	29	0,62896084
5	0,62869023	30	0,34193592
6	0,34125157	31	- 0,99266450
7	- 0,99852938	32	2,9392496
8	2,9333327	33	1,5916371
9	1,5909508	34	1,3035761
10	1,3033051	35	1,1647395
11	1,1645800	36	1,0732989
12	1,0731813	37	1,0001531
13	1,0000510	38	0,93201312
14	0,93191094	39	0,85891369
15	0,85879614	40	0,76759873
16	0,76743932	41	0,62909599
17	0,62882575	42	0,54227715
18	0,54159360	43	- 0,93974635
19	- 0,99559525	44	2,9322190
20	2,9362048	45	1,5919605
21	1,5912935	46	1,3037116
22	1,3034405	47	1,1640193
23	1,1646597	48	1,0733577
24	1,0732401	49	1,0002041
25	1,0001021		

3) Polynôme : $0,5x^2 - 0,707110x + 0,5 = 0$

zéros : $\cos 45^\circ \pm \sin 45^\circ$; Période : π ; $\pi/\theta = 4$.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	27	- 0,99942726
2	0,41422000	28	2,4147930
3	- 0,99995606	29	1,0001057
4	2,4142639	30	0,41432584
5	1,0000151	31	- 0,99953944
6	0,41433515	32	2,4146809
7	- 0,99983795	33	1,0001209
8	2,4143520	34	0,41434099
9	1,0000301	35	- 0,99925114
10	0,41425020	36	2,4149694
11	- 0,99978008	37	1,0001261
12	2,4144399	38	0,41435614
13	1,0000453	39	- 0,99916285
14	0,41423555	40	2,41450578
15	- 0,99969175	41	1,0001512
16	2,4145283	42	0,41437120
17	1,0000603	43	- 0,99907505
18	0,41428044	44	2,4151457
19	- 0,99960390	45	1,0001663
20	2,4146164	46	0,41438638
21	1,0000755	47	- 0,99898677
22	0,41429559	48	2,4152342
23	- 0,99951553	49	1,0001815
24	2,4147046		
25	1,0000907		
26	0,41431074		

9) Polynôme : $0,5x^2 - 0,719340x + 0,5 = 0$

zéros : $\cos 44^\circ \pm i \sin 44^\circ$.

La première période est de 4. Les termes correspondants des cycles croissent, ce qui indique que $4/1$ est plus grand que π/θ . F_3 correspond à F_{48} , ce qui nous donne un cycle de 45 termes qui contient 11 termes négatifs.

$45/11 = \pi/\theta$ pour $\theta = 44^\circ$.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	22	0,69508639
2	0,4386800	23	$9,8769597 \times 10^{-6}$
3	- 0,84088606	24	- 101244,29
4	2,6279017	25	1,4386898
5	1,0581482	26	0,74360316
6	0,49363288	27	$9,3876682 \times 10^{-2}$
7	- 0,58711695	28	- 9,2135925
8	3,1419181	29	1,5472152
9	1,1204031	30	0,79235755
10	0,54614422	31	0,17662344
11	- 0,39233823	32	- 4,2230823
12	3,9875011	33	1,6754737
13	1,1378964	34	0,84183395
14	0,59685575	35	0,25079729
15	- 0,23676673	36	- 2,5486039
16	5,6622453	37	1,8310515
17	1,2620716	38	0,89254577
18	0,64633207	39	0,31820929
19	- 0,10851232	40	- 1,7031158
20	10,654222	41	2,0258389
21	1,3448204	42	0,94505741

n	F_n	n	F_n
43	0,38054326	47	0,43869088
44	- 1,1891421	48	- 0,84082957
45	2,2796223	49	2,6279816
46	1,0000106		

10) Polynôme : $x^2 - 1,9086877x + 10 = 0$

zéros : $\sqrt{10}(\cos 72,43^\circ \pm i \sin 72,43^\circ)$; $\Phi / \theta = 2,485$

Les proportions des cycles et leurs termes négatifs sont :

$2/1$, $3/1$, $5/2$, ... , $82/33$ ($F_2 \longleftrightarrow F_{84}$) .

$$82/33 = 2,485$$

n	F_n	n	F_n
1	1,0	18	2,6583276
2	- 3,0913130	19	- 1,8530758
3	3,1445811	20	7,3051209
4	- 1,2713861	21	0,53978502
5	9,7741189	22	- 16,617205
6	0,88557757	23	2,5104706
7	- 9,3833781	24	- 2,0746244
8	2,9744019	25	6,7288371
9	- 1,4533326	26	0,42254681
10	8,7894246	27	- 21,757329
11	0,77095684	28	2,3683029
12	- 11,052206	29	- 2,3137451
13	2,8126663	30	6,2306818
14	- 1,6466574	31	0,30372768
15	7,9815958	32	- 31,015542
16	0,65580543	33	2,2311067
17	- 13,239737	34	- 1,5753928

n	F _n	n	F _n
35	5,7946082	64	- 4,8440353
36	0,18294548	65	3,9730822
37	-52,752406	66	- 0,60824988
38	2,0982525	67	18,349298
39	- 2,8571828	68	1,3637077
40	5,4083386	69	- 5,4242618
41	5,9793591 x 10 ⁻²	70	3,7522565
42	- 165,33331	71	- 0,75637529
43	1,9691715	72	15,129637
44	- 3,1695900	73	1,2477333
45	5,0636698	74	- 6,1058452
46	- 6,6164606 x 10 ⁻²	75	3,5464626
47	153,04689	76	- 0,91102340
48	1,8433482	77	12,885353
49	- 3,5162231	78	1,1326127
50	4,7526483	79	- 6,9204550
51	- 0,19540234	80	3,3536793
52	53,085145	81	- 1,0731119
53	1,7203110	82	11,227380
54	- 3,9042146	83	1,0180079
55	1,4700223	84	- 7,9144186
56	- 0,32843757	85	3,1722043
57	32,355873	86	- 1,2436943
58	1,5996247	87	9,9492483
59	- 4,3427783	88	3,90358663
60	4,2113610	89	- 9,1583198
61	- 0,46584161	90	3,0005910
62	23,375210	91	- 1,4239890
63	1,4808840	92	8,9512137

11) Polynôme : $x^2 - 2x + 5 = 0$

zéros : $1 \pm 2i$

$\theta = 63^\circ 26'$, $\pi/\theta = 2,34$

Les proportions des cycles et leurs termes négatifs sont :

$3/1$, $8/3$, $17/6$, $88/31$ ($F_5 \longleftrightarrow F_{9C}$) .

$88/31 = 2,84$.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	23	2,9606739
2	- 3,0	24	0,31119550
3	3,6666666	25	-14,067080
4	0,63636363	26	2,3554396
5	- 5,3571428	27	- 0,12274597
6	2,8536585	28	-42,734532
7	0,24786324	29	1,8829965
8	-18,172413	30	- 0,65533934
9	2,2751423	31	9,6296349
10	- 0,19766472	32	1,4807694
11	27,295358	33	- 1,3766228
12	1,3168186	34	5,6320768
13	- 0,75206330	35	1,1122281
14	3,6483765	36	- 2,4954806
15	1,4218568	37	4,0036220
16	- 1,5165285	38	0,75113080
17	5,2970036	39	- 4,6566362
18	1,0560701	40	3,0737378
19	- 2,7345341	41	0,37331601
20	3,8284650	42	-11,393478
21	0,69399355	43	2,4388475
22	- 5,2046778	44	- 5,0148728 x 10 ⁻²
		45	101,70342

n	F_n	n	F_n
46	1,9508374	75	0,49443584
47	- 0,56300181	76	- 0,1125764
48	10,380936	77	2,6165270
49	1,5404819	78	8,8923867 x 10 ⁻²
50	- 1,2457370	79	-54,227973
51	6,0136870	80	2,0922035
52	1,1685633	81	- 0,58982492
53	- 2,2787582	82	14,826270
54	4,1941774	83	1,6627607
55	6,80707126	84	- 1,0070471
56	- 4,1391048	85	6,9650107
57	3,1935724	86	1,2821261
58	0,43435514	87	- 1,8997724
59	- 9,5113175	88	4,6218942
60	2,5256895	89	0,92652817
61	2,0342545 x 10 ⁻⁶	90	- 3,4316642
62	- 243,79029	91	2,4570189
63	2,0105894	92	0,55366730
64	- 2,4715234	93	- 7,0306941
65	12,534667	94	2,7111673
66	1,6011462	95	0,15577584
67	- 1,1225408	96	-30,094403
68	6,1529908	97	2,1661272
69	1,2251655	98	- 0,30826701
70	- 2,0610012	99	18,219705
71	1,4025972		
72	0,66430684		
73	- 3,7049845		
74	3,3210100		

12) Polynôme : $x^3 - 2,5x^2 + 6x - 2,5 = 0$

zéros : $1 \pm 2i$, $1/2$

Cet exemple est identique à l'exemple 11 à l'exception de la présence ici de la troisième racine. Le cycle de 8 termes n'apparaît pas jusqu'au 46e terme. Le cycle de 88 termes demeure.

n	F _n	n	F _n
1	1,0	23	- 2,4096129
2	1,0	24	4,0750219
3	- 1,0	25	0,77301282
4	6,0	26	- 4,4681980
5	1,0833333	27	3,1190193
6	- 2,6538461	28	0,39693207
7	3,8913043	29	-10,596613
8	0,71601489	30	2,4718488
9	- 4,9824447	31	- 2,2777249 x 10 ⁻²
10	3,0034581	32	221,51728
11	0,33524155	33	1,9774283
12	-12,914635	34	- 0,52853667
13	2,3871582	35	11,460081
14	- 9,4540374 x 10 ⁻²	36	1,5637029
15	54,887455	37	- 1,1975382
16	1,9089044	38	6,1752320
17	- 0,61930339	39	1,1903137
18	10,073537	40	- 2,2005728
19	1,5036527	41	4,2721356
20	- 1,3252358	42	0,82962510
21	5,7729133	43	- 4,0268184
22	1,1338863	44	3,2416750

n	F_n	n	F_n
45	0,45758764	74	- 1,8338644
46	- 8,9268682	75	4,7264829
47	2,5601060	76	0,94213099
48	4,6956667 x 10 ⁻²	77	- 3,3071178
49	- 104,48115	78	3,5118905
50	2,0478554	79	0,57626573
51	- 0,44157848	80	- 6,6765526
52	13,323015	81	2,7488894
53	1,6247095	82	0,18108366
54	- 1,0774730	83	-25,611548
55	6,6404872	84	2,1952244
56	1,2470433	85	- 0,27767157
57	- 2,0094835	86	20,006884
58	1,4882014	87	1,7500860
59	0,88596801	88	- 0,85700239
60	- 3,6435448	89	7,8342894
61	3,3722900	90	1,3617800
62	0,51732828	91	- 1,6716647
63	- 7,8650430	92	4,9910303
64	2,6523120	93	0,99820283
65	0,11485246	94	- 3,0090022
66	-4,534113	95	3,6516804
67	2,1203829	96	0,63450677
68	- 0,35806464	97	- 5,8801367
69	15,963958	98	2,8503204
70	1,6867944	99	0,24581143
71	- 0,96420234		
72	7,1856335		
73	1,3041671		

13) Polynôme : $x^4 - 2,414214x^3 + 3,414214x^2 - 2,414214x + 1 = 0$
 zéros : $\frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$, $\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$.

L'irrégularité de l'occurrence des termes négatifs, particulièrement dans les intervalles $F_{23} - F_{29}$, $F_{47} - F_{53}$, $F_{71} - F_{77}$, indique qu'il y a présente plus qu'une seule paire de zéros complexes de même module.

n	F_n	n	F_n
1	1,0	20	5,8285509
2	1,0	21	1,0000027
3	1,0	22	0,41421605
4	0,41421400	23	- 0,41420203
5	- 2,4142081	24	2,4142462
6	2,4142151	25	1,0000043
7	1,0000007	26	1,0000071
8	0,17157422	27	1,0000074
9	- 5,8283684	28	0,41422323
10	1,5857885	29	- 2,4141089
11	0,63060325	30	2,4142392
12	- 0,41420953	31	1,0000055
13	3,8284514	32	0,17158047
14	1,0000010	33	- 5,8281005
15	0,26120598	34	1,5857972
16	- 2,4141833	35	0,63060692
17	1,5857912	36	- 0,41419876
18	0,63060385	37	3,8285151
19	- 0,17156823	38	1,0000060

n	F_n	n	F_n
39	0,26121027	68	5,8289454
40	- 2,4141227	69	1,0000112
41	1,5858005	70	0,41422321
42	0,63060730	71	- 0,41417140
43	- 0,17156029	72	2,4143387
44	5,8287646	73	1,0000169
45	1,0000075	74	1,0000222
46	0,41422015	75	1,0000194
47	- 0,41418504	76	0,41423850
48	2,4142996	77	- 2,4139354
49	1,0000118	78	2,4142793
50	1,0000145	79	1,0000137
51	1,0000120	80	0,17159181
52	0,41422948	81	- 5,8276120
53	- 2,4140338	82	1,5358129
54	2,4142560	83	0,63061391
55	1,0000091	84	- 0,41417907
56	0,17158566	85	3,8286338
57	- 5,8278760	86	1,0000138
58	1,5858044	87	0,26121827
59	0,63061030	88	- 2,4140064
60	- 0,41418931	89	1,5858175
61	3,8285727	90	0,63061321
62	1,0000100	91	- 0,17154671
63	0,26121431	92	5,8291272
64	- 2,4140649	93	1,0000150
65	1,5858091	94	0,41422638
66	0,63061026	95	- 0,41415755
67	- 0,171155351	96	2,4143794

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. W. S. Cassels, An introduction to diophantine approximations, Cambridge University Press, 1957.
- [2] Hardy and Wright, An introduction to the theory of numbers. Oxford at the Clarendon Press.
- [3] E. B. Hildebrand, Introduction to numerical analysis, M^c Graw Hill, New York, 1956.
- [4] A. Ya. Khintchine, Continued fractions, P. Noordhoff Ltd., Groningen, the Netherlands.
- [5] Mahler, K. On the Taylor coefficients of rational functions, Proc. Cambridge Soc., 52 (1956), 39-48.
- [6] F. D. Parker, On the general term of a recursive sequence, The Fibonacci quarterly, vol 2, no. 1, Feb. 64, 67-71.
- [7] T. Schneider, Introduction aux nombres transcendants, Gauthier-Villars, Paris, 1959.
-

DEUXIEME THESE

Proposition donnée par la Faculté :

- FRACTIONS CONTINUES D'APRES KLEINCHINE.

Vu et approuvé

NANCY, le 24 mai 1965

Le doyen de la Faculté des Sciences

J. AUBRY

Vu et permis d'imprimer

NANCY, le 25 mai 1965

Le Recteur de l'Académie

Président du Conseil de l'Université

P. IMBS

